*Лабораторная работа №11 – Подсчеты мощности множеств*

**Цель работы:** освоить приёмы работы с ориентированными графами, циклическими и ациклическими; исследовать отношения частичного порядка, задаваемые орграфами.

Задача №1. Пусть D – направленный граф, степень исхода каждой вершины которого не меньше единицы. Докажите, что D содержит направленный цикл. Покажите, что результат остается в силе, если степень захода каждой вершины не меньше единицы.

Решение:

Пусть граф D имеет n вершин, тогда путь от вершины 1 к некоторой вершине k <= n можно задается следующим образом: {(1,2),(2,3),(3,4)...(k-1,k)}. Рассмотрим вершину k, т.к по условию задачи степень исхода каждой вершины больше либо равна единице, то вершина k должна иметь исходящее ребро, тк по условию размер нашего графа n, это означает, что из вершины k мы можем построить исходящее ребро к одной из вершин, которая является частью пути от 1 к k и тогда D содержит направленный цикл, либо к одной из вершин, которая не является частью пути.

Рассмотрим подробнее второй случай, пусть k1 вершина, которая является концом пути  
{(1,2),(2,3),(3,4)...(k1-1,k1)}, тогда вершины, которые не относятся к этому пути задаются следующим множеством K1 = {k2,k3...kn}, т.к k1 имеет исходящее ребро, получаем новое ребро (k1,ki) где ki ∈ K, i∈N. Далее рассматриваем новый путь {(1,2),(2,3),(3,4)...(k1-1,k1), (k1,ki)}, а множество K2 для этого пути такое, что K2\ki, таким образом, мы дойдём до пути {(1,2),(2,3),(3,4)...(kn-1,kn)}, где вершина kn имеет исходящее ребро, которое направлено в одну из вершин, по которой идёт путь  
{(1,2),(2,3),(3,4)...(kn-1,kn)}, тогда D содержит направленный цикл.

Аналогичное рассуждение будет и для степени захода, тк любое заходящее ребро для одной вершины, есть исходящее ребро для другой.

Задача №2. Докажите, что любой направленный ациклический граф содержит по крайней мере одну вершину с нулевой степенью захода. Воспользуйтесь этим результатом, чтобы построить другой алгоритм, осуществляющий топологическую сортировку.

Решение:

Воспользуемся результатом первой задачи, чтобы привести доказательство от противного. Пусть направленный граф G ациклический и не содержит в себе вершин с нулевой степенью захода. Тогда каждая степень захода не меньше единицы, что означает, что граф G содержит в себе цикл, что противоречит нашему условию (направленный граф G ациклический). Тогда граф G должен содержать в себе как минимум одну вершину с нулевой степенью захода.

Реализуем алгоритм топологической сортировки

1) Вычисляем входную степень (indegree) каждой вершины.

2) Находим вершину с входной степенью, равной нулю. Вершина с нулевой входной степенью не имеет входящих ребер и может быть началом упорядоченного списка.

3) Добавляем найденную вершину в результативный список. После удаляем все исходящие ребра из этой вершины. Это означает, что нужно уменьшить входную степень всех вершин, на которые указывают эти ребра.

Повторение шагов:

4) Повторяем шаги 2 и 3 для оставшихся вершин в графе. Каждый раз находим вершину с нулевой входной степенью, добавляем её в список и удаляйте её исходящие ребра. Продолжаем процесс до тех пор, пока все вершины не будут включены в результативный список.

Задача №3. Докажите, что если в графе G содержится эйлеров контур, то граф G ориентируемый.

Решение:

Эйлеров контур в графе называется путь, который проходит по каждому ребру, причем ровно один раз. Это значит, что идя по этому пути мы можем направлять ребра по направлению движения в контуре, тем самым можно сказать, что граф G является направленным.

Задача №4. Докажите, что связный ненаправленный граф ориентируем тогда и только тогда, когда каждое его ребро содержится в цикле.

Решение:

Выбираем любой цикл C и направляем его ребра по циклу. Если каждое ребро графа G содержится в C, доказательство завершено. Если нет, выбираем любое ребро Ei, которое не находится в C, но смежно с ребром из C. По гипотезе, Ei содержится в цикле С0, ребра которого мы можем направить циклически (за исключением тех, которые уже направлены). Продолжаем на каждом этапе направлять по крайней мере одно новое ребро. На каждом этапе граф G остается связным, так что в конце он будет таким.

Задача №5. Докажите, что если направленный граф эйлеров, то он сильно связен.

Решение:

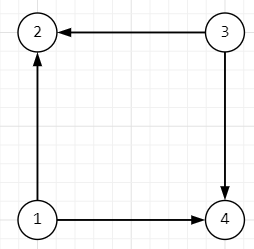
Пусть ребра эйлерова цикла C = {A1, A2, … Ai...A1}. Выбираем любые две вершины, x и y.

Тогда:

C = -A1-x-A2-y-A3-

Теперь рассмотрим направленную цепь -x-A2-y- и заметим, что это направленный путь от x к y. Аналогично, -y-A3-A1-x- является направленным путём от y к x, тогда для любых двух упорядоченных вершин есть путь от x к y и от y к x, следовательно граф сильно связен по определению.

Задача №6. Найдите направленный граф, который не является эйлеровым, но для которого основной граф эйлеров.



Задача №7. Покажите, что сумма квадратов входящих степеней всех вершин равна сумме квадратов исходящих степеней всех вершин в любом полном ориентированном графе.

Решение:

Пусть граф G - полный ориентированный граф, имеет n вершин. Тогда количество вершин этого графа n, у полного ориентированного графа степень входящих ребер и степень выходящих ребер равна n-1, тогда сумма квадратов входящих ребер равна (n-1)^2 + (n-1)^2 + … + (n-1)^2 и сумма исходящих равна (n-1)^2 + (n-1)^2 + … + (n-1)^2, как можно заметить, они равны.

Задача № 8. что если D – турнир, то в нем есть направленный гамильтонов путь.

Докажем методом математической индукции по количеству вершин n в турнире. Пусть утверждение верно для n и пусть имеется некий турнир Т с n+1 вершинами. Выберем вершину v0 в Т и пусть v1,v2,…,vn – направленный путь в T\v0. Пусть i∈N {0,…,n} – максимальное число такое, что для любого j<=i имеется дуга из vj в v0. Тогда v1,…,vi,v0,vi+1,…,vn – искомый гамильтонов путь.